Γραμμική Άλγεβρα 1 23/10/15

Πρόταση: Έστω $i,j \in \{1,2,\dots,\nu\}$ με $i \neq j$ και $\kappa,\lambda \in F$.

i) $M_i(1) = I_\nu$. Αν $\kappa,\lambda \neq 0$ $[M_i(\kappa)][M_i(\lambda)] = M_i(\kappa\lambda) \in F^{\nu \cdot \nu}$

ii) Αν $\lambda \neq 0_F$ τότε ο $M_i(\lambda)$ αντιστρέφεται, και $[M_i(\lambda)]^{-1} = M_i(\lambda^{-1})$

(λ^{-1})

iii) $M_{ij}(0_F) = I_\nu$ και $[M_{ij}(\kappa)][M_{ij}(\lambda)] = M_{ij}(\kappa+\lambda)$

iv) Ο πίνακας $M_{ij}(\lambda)$ αντιστρέφεται και $[M_{ij}(\lambda)]^{-1} = M_{ij}(-\lambda)$

v) Ο πίνακας M_{ij} αντιστρέφεται και $(M_{ij})^{-1} = M_{ij}$

Παράδειγμα: $\nu = 2$ $M_2(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $(M_2(\lambda))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$

$M_{12}(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $M_{12}(-\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$M_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $M_{12}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ άρα $M_{12}^{-1} = M_{12}$

Απόδειξη

Θα δείξουμε i) => ii) και iii) => iv) και το iii το i και iv) (εύκολη άσκηση)

i) => ii) $M_i(\lambda) \cdot M_i(\lambda^{-1}) \overset{(i)}{=} M_i(\lambda \cdot \lambda^{-1}) = M_i(1) \overset{(i)}{=} I_\nu$. Ομοίως

$[M_i(\lambda)^{-1}][M_i(\lambda)] = M_i(\lambda^{-1}\lambda) = M_i(1) = I_\nu$

iii => iv) $[M_{ij}(\lambda)][M_{ij}(-\lambda)] \overset{(iii)}{=} M_{ij}(\lambda-\lambda) = M_{ij}(0_F) \overset{(iii)}{=} I_\nu$ Ομοίως

$[M_{ij}(-\lambda)][M_{ij}(\lambda)] \overset{(iii)}{=} M_{ij}(-\lambda+\lambda) = M_{ij}(0_F) \overset{iii}{=} I_\nu$

Απόδειξη

iii) δηλ. $M_{ij}(0_F) = I_\nu$, $[M_{ij}(\kappa)][M_{ij}(\lambda)] = M_{ij}(\kappa+\lambda)$

Προφανώς!

Έστω $M_{ij}(\kappa) = (a_{de})_{1\le d,e\le \nu}$

$M_{ij}(\lambda) = (b_{ef})_{1\le e,f\le \nu}$

$(M_{ij}(\kappa))(M_{ij}(\lambda)) = (c_{df})_{1\le d,f\le \nu}$

Θα δ.ο. $(c_{df})_{1\le d,f\le \nu} = M_{ij}(\kappa+\lambda)$

Από ορισμό πολλαπλασιασμού πινάκων $c_{df} = \sum_{e=1}^{\nu} a_{de} b_{ef}$ (*)

Ισχυρισμός

Θα δ.ο. $c_{df} = 1_F$ αν $d=f$

$= 0_F$, αν $d \neq f$ και $(d,f) \neq (i,j)$

$= \kappa+\lambda$, αν $(d,f) = (i,j)$

Απόδειξη ισχυρισμού

Περίπτωση 1: $j \neq i$. Τότε $a_{je} = 0_F$, εκτός αν $e=d$ οπότε $a_{dd} = 1_F$. Επομένως (*) $c_{df} = a_{dd} a_{df} = b_{df}$ αφού $i \neq d$

$b_{df} = \begin{cases} 1 & \text{αν } f=d \\ 0 & \text{αν } f \neq d \end{cases}$. Άρα $c_{df} = \begin{cases} 0 & \text{αν } f \neq d \\ 1 & \text{αν } f=d \end{cases}$

Περίπτωση 2: $d=i$ και $f \neq j$. Τότε $b_{ef} = \begin{cases} 0 & \text{αν } e \neq f \\ 1 & \text{αν } e=f \end{cases}$

Άρα (*) $\Rightarrow c_{df} = a_{jf} b_{ff} = a_{df} = a_{if} = \begin{cases} 1 & \text{αν } f=i \\ 0 & \text{διαφορ.} \end{cases}$

Περίπτωση 3: $d=i$ και $f=j$. Τότε $a_{ie} = \begin{cases} 0 & \text{αν } e \neq i \text{ και } e \neq j \\ \kappa & e=i \\ 1 & e=j \end{cases}$

Και $b_{ej} = \begin{cases} 0 & e \neq i \text{ και } e \neq j \\ 1 & e=i \\ \lambda & e=j \end{cases}$

Άρα $c_{df} = c_{ij} = a_{ii} b_{ij} + a_{ij} b_{jj} = 1 \cdot \lambda + \kappa \cdot 1 = \kappa+\lambda$

Πρόταση
Στο σύνολο $F^{\nu \cdot \mu}$ η σχέση A ισοδύναμο B αν B γραμμοϊσοδύναμο με τον A είναι σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη
i) Έστω $A \in F^{\nu \cdot \nu}$. Τότε $A \overset{\Gamma 1:\, \Gamma_1 \to \Gamma_1(1)}{\rightsquigarrow} A$. A ισοδύναμο με A.
ii) (Μεταβατική) Έστω $A, B, C \in F^{\nu \cdot \mu}$ με A "ισοδύναμο" B και B "ισοδύναμο" C υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία γραμμοπράξεων $A \rightsquigarrow A_1 \rightsquigarrow A_2 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow A_N = B$ και πεπερασμένη ακολουθία γραμμοπράξεων $B \rightsquigarrow B_1 \rightsquigarrow B_2 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow B_M = C$
Τότε η πεπερασμένη ακολουθία γραμμοπράξεων
$A \rightsquigarrow A_1 \rightsquigarrow A_2 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow A_N = B \rightsquigarrow B_1 \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow B_M = C$
μας λέει ότι A "ισοδύναμος" με τον C.
iii) (Συμμετρική) Υποθέτουμε A "ισοδύναμος" B. Θα δείξουμε B "ισοδύναμος" A. Από την προηγούμενη πρόταση, υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, \ldots, E_N \in F^{\nu \cdot \nu}$ ώστε $B = E_1 E_2 \cdots E_N \cdot A$
(1) Από προηγούμενη πρόταση, κάθε E_i είναι αντιστρέψιμος, με αντίστροφο στοιχειώδη πίνακα. Η (1) δίνει

$E_1^{-1} B = E_2 \ldots E_N \cdot A \Rightarrow E_2^{-1} \cdot E_1^{-1} B = E_3 \cdot E_4 \ldots E_N \cdot A \Rightarrow$ με επαγωγή

$E_N^{-1} \ldots E_2^{-1} E_1^{-1} B = A$ Αφού κάθε E_i^{-1} είναι στοιχειώδης $\Rightarrow$ B "ισοδύναμος" με A.

Παράδειγμα

$v=3$ $\quad M_2(7)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&7&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $(M_2(7))^{-1}=M_2(7^{-1})=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/7&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

Παράδειγμα

Έστω $A=\begin{pmatrix}2&-3&5\\1&4&0\end{pmatrix}$

Η διαδικασία $A \xrightarrow{r_1 \mapsto 3r_1} \begin{pmatrix}6&-9&15\\1&4&0\end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \mapsto r_2+r_1} \begin{pmatrix}6&-9&15\\7&-5&15\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix}7&-5&15\\6&-9&15\end{pmatrix}=B$ είναι ισοδύναμη με

$$A \rightsquigarrow A_1=M_1(3)\cdot A \rightsquigarrow A_2=[M_{21}(1)]A_1 \rightsquigarrow B=M_{12}\cdot A_2$$

Συμπέρασμα: $B=M_{12}[M_{21}(1)]\cdot[M_1(3)]A$

<u>Υπενθύμιση</u>

$A,B \in F^{v\cdot\mu}$ λέμε B γραμμοϊσοδύναμο με A αν υπάρχει πεπερασμένη ακολουθία γραμμοπράξεων

$$A \rightsquigarrow A_1 \rightsquigarrow A_2 \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow A_v=B$$

Πόρισμα: Έστω $A,B \in F^{v\cdot\mu}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

i) B γραμμοϊσοδύναμα με τον A

ii) Υπάρχουν στοιχειώδεις $v\cdot v$ πίνακες $E_1, E_2 \dots E_M$ ώστε $B=E_1\cdot E_2\dots E_M\cdot A$

Απόδειξη άμεση γιατί δείξαμε γραμμοπράξεις αντιστοιχούν σε πολλαπλασιασμό από τα αριστερά με $M_i(\lambda)$, $M_{ij}(\lambda)$ ή M_{ij} και αντίστροφα.

Ορισμός: Έστω $A \in F^{\nu \cdot \mu}$ κλιμακωτός. Ονομάζουμε βαθμίδα (ή τάξη (rank)) του A τον αριθμό των μη μηδενικών γραμμών του A.

Παράδειγμα: i) $A = \emptyset_{\nu \cdot \mu}$ τότε A κλιμακωτός και βαθμίδα $(A)=0$

ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Τότε A κλιμακωτός και βαθμίδα $(A)=2$

iii) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ όχι κλιμακωτός

Πρόταση(*)

Έστω $A, B \in F^{\nu \cdot \mu}$ γραμμοισοδύναμοι και κλιμακωτοί. Τότε βαθμίδα(A) = βαθμίδα(B).

Παράδειγμα: Για $\nu=3$ οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

είναι κλιμακωτοί, και βαθμίδα$(A)=2$, βαθμίδα$(B)=3$. Άρα από την Πρόταση AB όχι γραμμοισοδύναμοι.

Ορισμός: Έστω $A \in F^{\nu \cdot \mu}$. Από Αλγόριθμο απαλοιφής Gauss, υπάρχει $B \in F^{\nu \cdot \mu}$ κλιμακωτός γραμμοισοδύναμος με τον A (γενικά υπάρχουν αρκετοί τέτοιοι B). Ορίζουμε βαθμίδα(A) - βαθμίδα(B)

Πρόταση. Ο προηγούμενος ορισμός δεν εξαρτάται από την επιλογή του B. Δηλαδή αν $B, B' \in F^{\nu \cdot \mu}$ κλιμακωτοί και A,B γραμμοισοδύναμοι και A,B' γραμμοισοδύναμοι τότε βαθμίδα(B) = βαθμίδα(B')

Απόδειξη
Αφού γραμμοϊσοδυναμία σχέση ισοδυναμίας $\Rightarrow B, B'$ γραμμοϊσοδύναμοι.

Από πρόταση (*) το αποτέλεσμα έπεται.

Π.χ. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{b-2} r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = C$

Κλιμακωτός ο B, άρα η βαθμίδα(A) = βαθμίδα(B) = 1

Παράδειγμα
Έστω $b \in \mathbb{R}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & b \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \mapsto r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & b-2 \end{bmatrix} = B$

Περίπτωση 1
- $b \neq 2$ τότε B κλιμακωτός βαθμίδα 2, άρα βαθμίδα(A) = βαθμίδα(B) = 2

Περίπτωση 2
$b = 2$ τότε B κλιμακωτός βαθμίδα 2, άρα βαθμίδα(A) = βαθμίδα(B)

$Ax = b$
$A \in F^{\nu \cdot \mu}$
$b \in F^{\nu \cdot 1}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\mu \end{pmatrix}$

Πρόταση: Το σύστημα $Ax = b$ έχει λύσεις $\Leftrightarrow$ βαθμίδα(A) = βαθμίδα(A|b)

Αν υπάρχουν λύσεις εξαρτώνται από μ - βαθμίδα(A) "παραμέτρους".
ΑΓΝΩΣΤΩΝ